



TITLE:

# 時間遅れをもつ常微分方程式の基礎理論入門 (マクロ経済動学の非線形数理)

AUTHOR(S):

宮崎, 倫子

---

CITATION:

宮崎, 倫子. 時間遅れをもつ常微分方程式の基礎理論入門 (マクロ経済動学の非線形数理). 数理解析研究所講究録 2010, 1713: 72-87

ISSUE DATE:

2010-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170249>

RIGHT:

# 時間遅れをもつ常微分方程式の基礎理論入門

## Introduction to the theory of delay differential equations

静岡大学 宮崎 倫子(Rinko Miyazaki)  
Shizuoka University

### 1 序

常微分方程式は、現象の時間変化を記述するためのひとつの道具である。例えば、

$$(1.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad (a: \text{実定数}, a \neq 0)$$

は、最も単純な常微分方程式のひとつである。この方程式で記述される現象には、次のようなものがある。

**例 1.1.** 食糧などの生活環境が良好で出生率および死亡率が安定している限りは、人口の増加速度はそのときの総人口に比例するという（マルサスの法則）。このとき、ある時点  $t$  における人口  $x$  がみたす微分方程式は、(1.1) で与えられる。

**例 1.2.** 放射性同位体は時間とともに放射性崩壊する。その崩壊の速度は、その原子数に比例する。このとき、ある時点  $t$  での原子数を  $x$  とすると、 $x$  がみたす微分方程式は (1.1) で与えられる。

いずれのケースにおいても、時刻  $t$  における変化率  $dx/dt$  が時刻  $t$  における状態量  $x$  に即座に反応することが前提となっている。そこで、この反応に遅れが生じた場合を考えよう。このとき、方程式 (1.1) は次の時間遅れ  $\tau > 0$  をもつ微分方程式

$$(1.2) \quad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t - \tau)$$

に書き換えることができる。時間遅れがない場合には、解は指数関数

$$x(t) = Ce^{at}, \quad (C: \text{任意定数})$$

で与えられ、単調に減少あるいは増加。しかし、時間遅れが組み込まれると、時間遅れの大きさに応じて解の挙動が変化する。実際、図 1 をみると  $\tau = 0.2$ （破線）のときには、 $\tau = 0$ （実線）の場合と同様に単調に 0 へと収束していくが、 $\tau = 0.6$ （1 点鎖線）では減衰振動、 $\tau = 0.8$ （2 点鎖線）では振動しながら発散していく様子がわかるであろう。

時間遅れを導入した数理モデルとして、Hutchinson [3] によって提示された時間遅れをもつロジスティック方程式

$$(1.3) \quad \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \left( 1 - \frac{x(t - \tau)}{K} \right), \quad (a, K: \text{正定数})$$

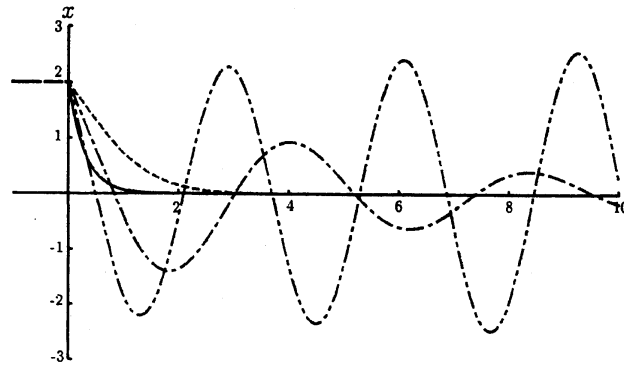


図 1:  $a = -2$  のときの (1.2) の解のグラフ. 実線が  $\tau = 0$ ; 破線が  $\tau = 0.2$ ; 1 点鎖線が  $\tau = 0.6$ ; 2 点鎖線が  $\tau = 0.8$  のとき. 初期条件はいずれも  $x(s) = 2$  ( $s \in [-\tau, 0]$ ).

も基本的な例である. 方程式 (1.2) と同様, 図 2 に示すように時間遅れの大きさによって解の挙動に違いが出てくる. なお, この方程式においては,  $\tau$  を大きくしても解は発散するのではなく, 周期的な挙動に漸近することが知られている [4]. May [6] によると, 方程式 (1.3) は草食動物の個体数  $x(t)$  の変動を表す数理モデルを与えていて, このときの時間遅れ  $\tau$  は餌となる植物が再生するまでの時間と考えることができるそうである. さらに, May は Nicholson のヒツジキンバエの実験結果と, この方程式の解のグラフをうまくフィットさせている [6, Fig. 4.8]. 方程式 (1.3) については, [11] の第 3.2 節も参考にしてほしい.

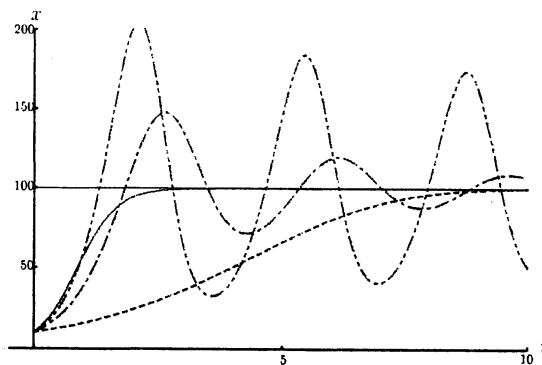


図 2:  $a = -2, K = 100$  のときの (1.2) の解のグラフ. 実線が  $\tau = 0$ ; 破線が  $\tau = 0.2$ ; 1 点鎖線が  $\tau = 0.6$ ; 2 点鎖線が  $\tau = 0.8$  のとき. 初期条件はいずれも  $x(s) = 10$  ( $s \in [-\tau, 0]$ ).

Mackey & Glass [5] は, 生理学における物質 (白血球) の生成調節機構を示す数理モデルに時間遅れが伴うと考え, 好中球の生成ダイナミクスを次の微分方程式で与えた.

$$(1.4) \quad \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + \frac{bx(t-\tau)}{1+x(t-\tau)^m}, \quad (a, b, m: \text{正定数})$$

この方程式は, スカラーの自励系方程式であっても解がカオス的になることがある例とし

て、非常に有名である。図(3)に時間遅れがない場合(実線)と時間遅れがあってカオス的な挙動をする解(破線)の解のグラフを示しておく。

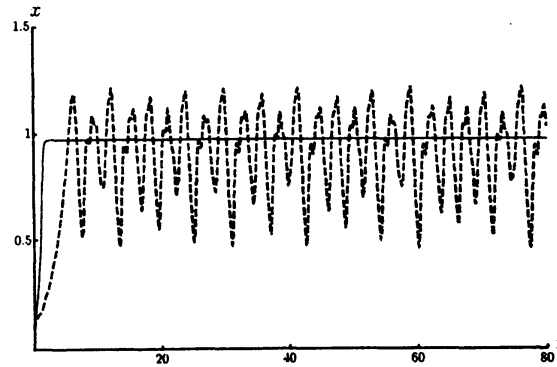


図 3:  $a = -2, b = 3.54, m = 10$  のときの (1.4) の解のグラフ. 実線が  $\tau = 0$ ; 破線が  $\tau = 1$  のとき. 初期条件はいずれも  $x(s) = 0.1$  ( $s \in [-\tau, 0]$ ).

その他にも、制御システムにおいてフィードバックにかかる時間遅れも指摘されており、様々な数理モデルが数多く研究されている(例えば [2] 参照). いずれにせよ、時間遅れは反応、再生そしてフィードバックにかかる遅れとして数理モデルに組み込まれることが多い. 身近な例としては、シャワーの温度調節が上げられる. 熱いと感じて温度を下げるがぬるすぎて再び温度を上げる. 適温になるまで、この操作を何回か繰り返した経験を持つ人も多いのではないだろうか. これは、シャワーの温度調節機構に時間遅れがあるがゆえに起こることであり、その結果として、お湯の温度が振動することになる. このように、時間遅れは解に振動性や不安定性を誘発すると考えられてきたが、Mackey & Glass が提示した方程式 (1.4) の数値計算例により、この考え方はますます強固なものとなったと考えられる.

その一方で、カオス制御法のひとつとして時間遅れを利用した方法が、Pyragas [7] によって提案され、Delayed Feedback 制御法として知られている. Pyragas が提示した具体例を紹介しよう. それは、制御入力  $u(t)$  をもつ Rössler 方程式

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -y(t) - z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + 0.2y(t) + u(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = 0.2 + z(t)(x(t) - 5.7) \end{cases}$$

である. ここで、

$$u(t) = K(y(t - \tau) - y(t)), \quad (K: \text{ゲイン係数})$$

とする. 未制御状態 ( $K = 0$ ) のときには、(1.5) の解はカオス的であることが知られている(図4参照). Pyragas の主張は、 $K$  や  $\tau$  をうまくとることにより、未制御状態のカオスアトラクター内に内在する周期  $\tau$  の不安定周期軌道を安定化することができるというも

のである。実際、 $K = 0.2, \tau = 5.9$  や  $K = 0.2, \tau = 11.75$  で安定な周期解が得られることを数値的に示している（図5および6参照）。さらに、 $u(t)$  に次のような制限

$$u(t) = \begin{cases} -0.1, & K(y(t-\tau) - y(t)) \leq -0.1 \\ K(y(t-\tau) - y(t)), & -0.1 < K(y(t-\tau) - y(t)) < 0.1 \\ 0.1, & K(y(t-\tau) - y(t)) > 0.1 \end{cases}$$

を与えると、図7のように、 $\tau = 17.5$  の周期解も安定化される。なお、いずれの図においても初期値は  $x(s) = 1, y(s) = z(s) = 0$  ( $s \in [-\tau, 0]$ ) としている。

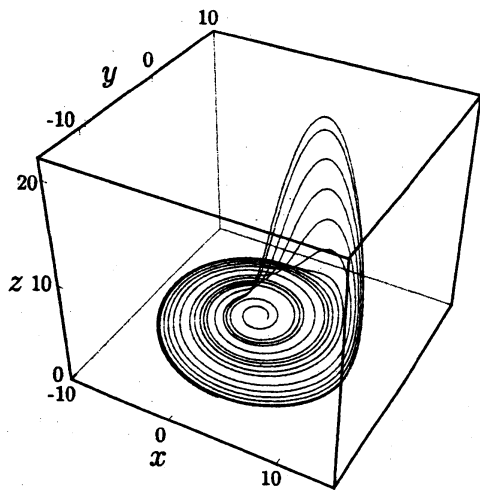


図 4: 未制御状態の (1.5) の解軌道。

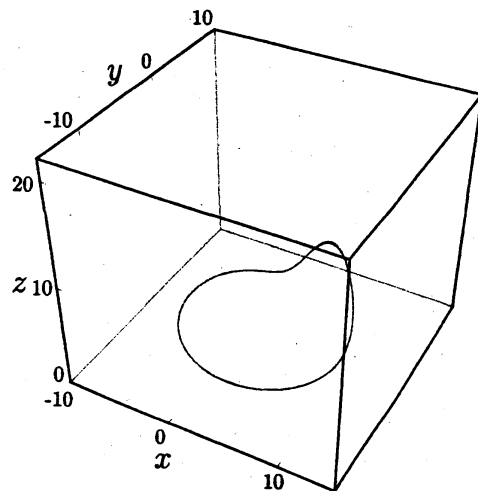


図 5:  $K = 0.2, \tau = 5.9$  としたときの (1.5) の解軌道 ( $100 \leq t \leq 200$ ).

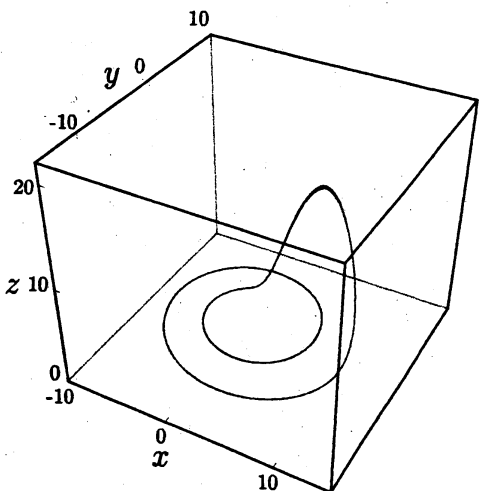


図 6:  $K = 0.2, \tau = 11.75$  としたときの (1.5) の解軌道 ( $400 \leq t \leq 500$ ).

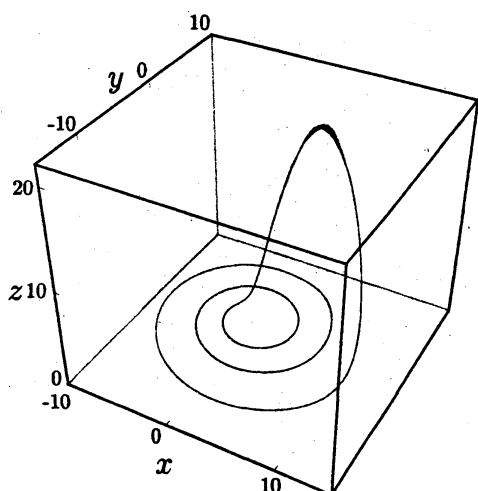


図 7:  $K = 0.2, \tau = 11.75$  で入力  $u(t)$  に制限を加えた (1.5) の解軌道 ( $400 \leq t \leq 500$ ).

このように、時間遅れは解に振動性や不安定性をもたらす以外に、近年では安定化そして、周期解の周期や振幅の調整に利用できるのではないかと考えられている。その多くは、数値シミュレーションによる結果であり、解析的な結果がそれに追いついていないのが現状である。

本稿では、時間遅れをもつ微分方程式の基本的な表記法について定義した後、線形方程式の解の構造や漸近的な解の挙動を決定するための基礎的な理論を紹介する。

## 2 準備

以下では、実数全体の集合を  $\mathbb{R}$ 、複素数全体の集合を  $\mathbb{C}$  で表し、微分方程式の未知関数の値の空間を  $E$  とする。通常  $E = \mathbb{R}^n$  で与えられることが多いが、特に線形方程式の理論を展開する場合には  $\mathbb{C}^n$  にとる方が都合の良いこともある。

まず、常微分方程式の初期値問題について復習しておこう。集合  $\mathbb{R} \times E$  を定義域とする連続関数  $f: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  に対して、常微分方程式

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

を考えよう。この方程式に対しては、未知関数  $x$  の値がとりうる空間  $E$  を相空間とよぶ。また、初期値問題とは任意の  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$  に対して、

$$x(t_0) = x_0$$

をみたし、 $t \in \mathbb{R}$  で方程式 (2.1) をみたす関数  $x$  を求めることである。

時間遅れをもつ微分方程式の場合、相空間は区間  $[-\tau, 0]$  から  $E$  への連続な関数からなる空間として与えられる。すなわち、

$$C := C([-\tau, 0], E) = \{\phi: [-\tau, 0] \rightarrow E: \phi \text{ は連続関数} \}$$

ここで、 $\tau > 0$  が時間遅れに相当する。 $E$  におけるノルム  $|x|$  ( $x \in E$ ) をユークリッドノルムで与える。 $E$  におけるノルムを用いて  $C$  におけるノルムを

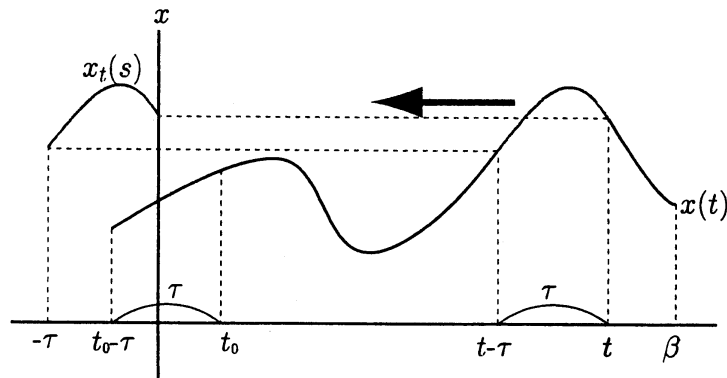
$$\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\phi(s)|, \quad (\phi \in C)$$

で与える。このとき、 $C$  はバナッハ空間になることに注意しよう。

時間遅れをもつ微分方程式を表記する上で、次に定義する  $t$ -切片も重要である。区間  $[\sigma - \tau, \sigma + a]$  ( $\sigma \in \mathbb{R}, a > 0$ ) 上で定義された連続関数  $x: [\sigma - \tau, \sigma + a] \rightarrow E$  に対して、 $x_t \in C$  を

$$x_t(s) = x(t + s), \quad (-\tau \leq s \leq 0)$$

で与え、これを関数  $x$  の  $t$ -切片とよぶ (図 8 参照)。

図 8: 関数  $x$  の  $t$ -切片

上で定義した, 相空間  $C$  と  $t$ -切片を用いて, 時間遅れをもつ常微分方程式を表現しよう. 集合  $\mathbb{R} \times C$  を定義域とする連続な汎関数  $F: \mathbb{R} \times C \rightarrow E$  に対して, 時間遅れをもつ常微分方程式は一般に次のように記述される.

$$(2.2) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t).$$

ここで,  $\dot{x}(t)$  は  $x(t)$  の  $t$  による右側微分を表すものとする. この方程式する相空間は, 先にも述べたとおり  $C$  である.

汎関数の表記になれるために,  $F$  についていくつかの例を示しておこう.

例 2.1. (i) 方程式 (1.2) の場合:

$$F(t, \phi) = a\phi(-\tau).$$

(ii) 方程式 (1.3) の場合:

$$F(t, \phi) = a\phi(0) \left( 1 - \frac{\phi(-\tau)}{K} \right).$$

(iii) 方程式 (1.4) の場合:

$$F(t, \phi) = -a\phi(0) + \frac{b\phi(-\tau)}{1 + \phi(-\tau)^m}.$$

(iv) 方程式 (1.5) の場合:

$$F(t, \phi) = \begin{pmatrix} -\psi(0) - \eta(0) \\ \phi(0) + 0.2\psi(0) + K(\psi(-\tau) - \psi(0)) \\ 0.2 + \eta(0)(\phi(0) - 5.7) \end{pmatrix}, \quad \left( \phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} \right).$$

(v) 複数の時間遅れを含む微分方程式

$$(2.3) \quad \dot{x}(t) = ax(t - \tau) + bx(t - \sigma)$$

も時間遅れ  $\tau, \sigma$  をもつ微分方程式であり、この場合には、

$$F(t, \phi) = a\phi(-\tau) + bx(-\sigma).$$

(vi) 積分項を含む微分方程式

$$(2.4) \quad \dot{x}(t) = ax(t) + \int_{t-\tau}^t c(s)x(s)ds$$

も時間遅れをもつ微分方程式であり、この場合には、

$$F(t, \phi) = a\phi(0) + \int_{-\tau}^0 c(t+s)\phi(s)ds.$$

## 注意 2.1. 積分微分方程式

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \int_0^t c(t,s)x(s)ds$$

も時間遅れをもつ微分方程式のひとつであるが、本稿で扱う理論の枠組みには入らない。この方程式は非有界な時間遅れをもっているが、本稿で扱うのは有限の遅れを持つ方程式のみである。

次に方程式 (2.1) の解および初期値問題を定義しておこう。関数  $x(t)$  が区間  $[t_0 - \tau, t_0 + a]$  ( $t_0 \in \mathbb{R}, a > 0$ ) 上で定義された方程式 (2.2) の解であるとは、 $x \in C([t_0 - \tau, t_0 + a], E)$  であって、かつ任意の  $t \in [t_0, t_0 + a]$  に対して、方程式 (2.2) をみたすときにいう。方程式 (2.2) に対する初期値問題とは、与えられた  $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$  に対して、

$$(2.5) \quad x_{t_0} = \phi$$

をみたす、 $[t_0 - \tau, t_0 + a]$  上で定義された方程式 (2.1) の解となる関数  $x$  を求めることである。式 (2.5) を初期条件とよび、また、 $t_0$  を初期時刻、 $\phi$  を初期関数とよぶ。

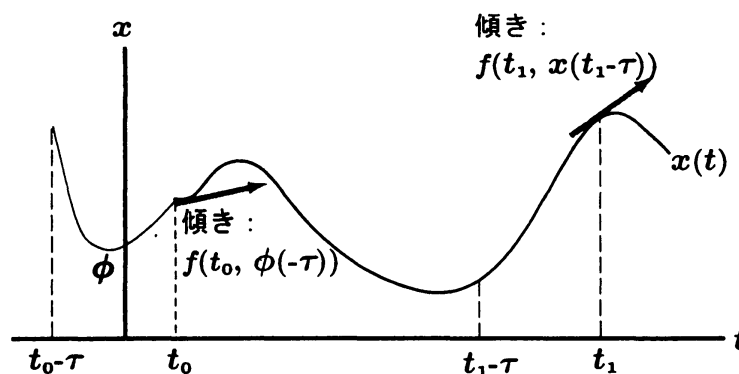


図 9: 初期関数と初期値問題の解



時間遅れがない方程式 (2.1) に対する初期値問題と大きく異なるのが、初期値  $x_0 \in E$  ではなく、初期関数  $\phi \in C$  を与える点である。例えば、時間遅れのない方程式 (2.1) に時間遅れを入れた次の方程式

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau))$$

を考えよう。この方程式においては、ある時刻  $t = t_1$  における解の微分係数（1次元であれば傾き）は、 $f(t_1, x(t_1 - \tau))$  であり、特に  $t_1 = t_0$  のときには  $f(t_1, x(t_1 - \tau)) = f(t, \phi(-\tau))$  である（図9）。つまり、初期条件として  $t = t_0$  のときの値だけを与えただけでは、 $t > t_0$  に対する解が決定できない。解を決定するには、 $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  に対する値、すなわち初期関数を与える必要がある。

時間遅れをもつ微分方程式 (2.2) に対しても、通常の常微分方程式 (2.1) とほぼ同様に、

- 局所解の存在
- 解の初期値に関する一意性
- 解の延長可能性

などの基礎的な定理が証明されている（[1] あるいは [9] などを参照）。

### 3 自励系線形方程式

前々節で例示した方程式 (1.2), (2.3), (2.4) などは全て時間遅れをもつ自励系線形微分方程式の例である。自励系線形微分方程式は一般に、連続線形作用素  $L: C \rightarrow E$  を用いて、

$$(3.1) \quad x'(t) = L(x_t)$$

と記述される。この一般的な方程式に対する理論は、文献 [1] あるいは [9] などを参照してもらいたい。ここでは、最も単純な方程式 (1.2) に的を絞り、解がどのような構造を持つのか、そして漸近的挙動を判定するための手順とそれを保証する一般理論を紹介する。

#### 3.1 指数関数解

方程式 (1.2) も時間遅れがない場合の方程式 (1.1) と同様に、指数関数  $x(t) = Ce^{at}$  をもつかどうか調べてみよう。ここで、 $C$  は任意定数である。指数関数解を方程式 (1.2) に代入すると、

$$\begin{aligned} aCe^{at} &= aCe^{a(t-\tau)} \\ \therefore 1 &= e^{-a\tau} \end{aligned}$$

これより  $\tau = 0$  となり、時間遅れがない場合の方程式 (1.1) に帰着される。そこで、指数関数

$$(3.2) \quad x(t) = Ce^{\lambda t}, \quad (C: \text{任意定数})$$

が解となるような  $\lambda$  があるか確かめてみよう。方程式 (1.2) に代入すると、

$$\begin{aligned}\lambda C e^{at} &= a C e^{\lambda(t-\tau)} \\ \therefore \lambda &= a e^{-\lambda\tau}\end{aligned}$$

すなわち、

$$(3.3) \quad \Delta(\lambda) := \lambda - a e^{-\lambda\tau} = 0.$$

したがって、 $\lambda$  についての方程式 (3.3) が解をもてば、微分方程式 (1.2) は指数関数解 (3.2) をつ。方程式 (3.3) は、微分方程式 (1.2) の特性方程式とよばれ、その解は特性根とよばれている。そして、特性根について次の命題が成立する。

**命題 3.1.**  $a \neq 0, \tau > 0$  を仮定する。このとき、微分方程式 (1.2) の特性根について次の事項が成り立つ。

- (i) 特性根は無数個存在する。
- (ii)  $\lambda$  が特性根であれば、その共役複素数  $\bar{\lambda}$  も特性根である。
- (iii) 任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して、 $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$  をみたす特性根は高々有限個である。

この命題からもわかるように、複素数値関数まで含めると、微分方程式 (1.2) には無限個の指数関数解が存在する。そして、微分方程式の線形性からこれらの線形結合

$$(3.4) \quad x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t}$$

もまた解であることがわかる。ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  は方程式 (3.3) の解であり、 $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$  は任意定数である。

**注意 3.1.** 互いに共役な方程式 (3.3) の解  $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}$  に対して、

$$x(t) = c_{j_1} e^{\lambda_{j_1} t} + c_{j_2} e^{\lambda_{j_2} t}$$

も解であるが、 $\lambda_{j_1} = \alpha + i\beta$  とおいて、この右辺を計算すると

$$x(t) = (c_{j_1} + c_{j_2}) e^{\alpha t} \cos \beta t + i(c_{j_1} - c_{j_2}) e^{\alpha t} \sin \beta t$$

となる。任意定数  $c_{j_1}, c_{j_2}$  を  $c_{j_1} = a_j + ib_j, c_{j_2} = a_j - ib_j$  のように互いに共役となるようにとると、この右辺は実数値関数

$$x(t) = a_j e^{\alpha t} \cos \beta t + b_j e^{\alpha t} \sin \beta t$$

と実数値関数の範囲内で解を与えることができる。

注意 3.1 より, 第 1 節の図 1 に現れた減衰振動や振動しながら発散する解の存在が理解できるのではないだろうか.

それでは, 指数関数の線形結合 (3.4) で全ての解を表現しつつしているのか? それに対する答は No である. 例えば,  $a\tau = -1/e$  のときには,  $\lambda = -1/\tau$  なる実数の特性根が存在するが, このとき

$$x(t) = Cte^{\lambda t}, \quad (C: \text{任意定数})$$

が解であることは容易に確認できる. このように, 指数関数に多項式をかけたものが解になることもある. そこで, 次に  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$(3.5) \quad x(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} c_k \quad (c_k: \text{任意定数})$$

が解になるかどうか確かめてみよう. 微分方程式 (1.2) に代入すると,

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} c_k + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} c_k &= a e^{\lambda(t-\tau)} \sum_{k=0}^n \frac{(t-\tau)^k}{k!} c_k \\ \therefore \lambda \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} c_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} c_{k+1} &= a e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^n \frac{(t-\tau)^k}{k!} c_k \end{aligned}$$

が成り立つ. 右辺の  $(t-\tau)^k$  に二項定理を適用して計算すると,

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} c_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} c_{k+1} &= a e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-\tau)^j}{j!} c_{k+j} \\ \therefore \frac{t^n}{n!} (\lambda - a e^{-\lambda\tau}) c_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \left( \lambda c_k + c_{k+1} - \sum_{j=0}^{n-k} a \frac{(-\tau)^j}{j!} e^{-\lambda\tau} c_{k+j} \right) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる.  $t$  の  $n$  次の項に着目すると,

$$(3.6) \quad \Delta(\lambda) c_n = 0$$

$t$  の  $k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) 次の項に着目すると,

$$\begin{aligned} \lambda c_k + c_{k+1} - \sum_{j=0}^{n-k} a \frac{(-\tau)^j}{j!} e^{-\lambda\tau} c_{k+j} &= 0 \\ \therefore (\lambda - a e^{-\lambda\tau}) c_k + (1 - a(-\tau) e^{-\lambda\tau}) c_{k+1} - \sum_{j=2}^{n-k} a \frac{(-\tau)^j}{j!} e^{-\lambda\tau} c_{k+j} &= 0 \\ (3.7) \quad \therefore \Delta(\lambda) c_k + \Delta^{(1)}(\lambda) c_{k+1} + \sum_{j=2}^{n-k} \frac{\Delta^{(j)}(\lambda)}{j!} c_{k+j} &= 0. \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta^{(j)}(\lambda)$  は  $\Delta(\lambda)$  の  $\lambda$  による  $j$  階微分を表すものとする。以上 (3.6) および (3.7) をまとめて、

$$\begin{pmatrix} \Delta(\lambda) & \Delta^{(1)}(\lambda) & \frac{\Delta^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{\Delta^{(n)}(\lambda)}{n!} \\ 0 & \Delta(\lambda) & \Delta^{(1)}(\lambda) & \cdots & \frac{\Delta^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \Delta(\lambda) & \cdots & \frac{\Delta^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \Delta(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。上式において、係数行列を  $D_n(\lambda)$  とおくと、 $\det D_n(\lambda) = (\Delta(\lambda))^{n+1}$  であるから、(3.5) が非自明な解であるためには、 $\lambda$  は特性根でなければならない。 $\lambda$  が特性根のとき、 $c_0$  は任意にとることができ、 $c_1, \dots, c_n$  は次の方程式の解として与えられる。

$$\begin{pmatrix} \Delta^{(1)}(\lambda) & \frac{\Delta^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{\Delta^{(n)}(\lambda)}{n!} \\ 0 & \Delta^{(1)}(\lambda) & \cdots & \frac{\Delta^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \Delta^{(1)}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この式の係数行列を  $D_n^1(\lambda)$  とおくと、 $\det D_n^1(\lambda) = (\Delta^{(1)}(\lambda))^n$  で与えられることから、 $\Delta^{(1)}(\lambda) \neq 0$  のとき、 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$  となる。一方、 $\Delta^{(1)}(\lambda) = 0$  のときには、 $c_1$  は任意にとることができ、 $c_2, c_3, \dots, c_n$  は次の方程式の解として与えられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{\Delta^{(n)}(\lambda)}{n!} \\ 0 & \frac{\Delta^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{\Delta^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{\Delta^{(2)}(\lambda)}{2!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この式の係数行列を  $D_n^2(\lambda)$  とおくと、 $\det D_n^2(\lambda) = (\Delta^{(2)}(\lambda)/2!)^{n-1}$  で与えられるが、 $\Delta^{(2)}(\lambda) = -a\tau^2 e^{-\lambda\tau} \neq 0$  なので、 $c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$  となる。以上の事項をまとめておこう。

**定理 3.1.** 関数 (3.5) が微分方程式 (1.2) の非自明な解となるのは、 $\lambda$  が (1.2) の特性根のときである。逆に、 $\lambda$  が (1.2) の特性根のとき、以下のいずれかが成り立つ。

- (i)  $\Delta^{(1)}(\lambda) \neq 0$  であれば、 $c_0$  は任意に取ることができるが、 $c_k = 0$  ( $k \geq 1$ ) である。すなわち、関数 (3.5) によって表される解は、 $x(t) = c_0 e^{\lambda t}$  のみである。
- (ii)  $\Delta^{(1)}(\lambda) = 0$  であれば、 $c_0$  および  $c_1$  は任意に取ることができるが、 $c_k = 0$  ( $k \geq 2$ ) である。すなわち、関数 (3.5) によって表される解は、 $x(t) = e^{\lambda t}(c_0 + c_1 t)$  のみである。

**注意 3.2.** 定理 3.1 の (ii) は、 $a\tau = -1/e$ 、 $\lambda = -1/\tau$  のときにのみ起こることは、 $\Delta(\lambda) = \Delta^{(1)}(\lambda) = 0$  から容易にわかる。

### 3.2 相空間のスペクトル分解

第3.1節では、微分方程式(1.2)の解が特性根を用いて指数関数(3.1)やあるいは定理3.1の(ii)のように指数関数と1次多項式の積で表されることをみた。しかし、これらが全ての解を表現しているわけではない。解全体の構造を知る上で重要なのが、相空間のスペクトル分解である。考え方は、 $\mathbb{C}^n$ が $\mathbb{C}^n$ 上の正方行列の一般固有間で直和分解できることと全く同じである。時間遅れをもつ線形微分方程式(3.1)に対しても、相空間 $C = C([- \tau, 0], \mathbb{C}^n)$ 上の作用素が定義され、そのスペクトルによって直和分解ができる。本節では、そのための理論を簡単に紹介しよう。理論を完全に理解するには、関数解析学からの知識が必要であり、詳細な一般論は文献[1]や[9]を参考にしてほしい。

微分方程式(3.1)の初期条件 $x_0 = \phi \in C$ をみたす解の $t$ -切片を $x_t(\phi)$ とあらわす。このとき、各 $t \geq 0$ に対して $C$ 上の作用素 $T(t)$ を

$$T(t)\phi = x_t(\phi), \quad (\phi \in C)$$

で定義する。この作用素の族はバナッハ空間 $C$ 上の有界線形作用素の強連続半群になる。この半群を方程式(3.1)の解半群という。そして、 $T(t)$ の生成作用素 $A$ が

$$A\phi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\phi - \phi}{t}$$

で定義される。そして、次の定理が成り立つ。

**定理 3.2** ([9, 定理 5.14] 参照). 微分方程式(3.1)の解作用素 $T(t)$ の生成作用素 $A$ のスペクトル $\sigma(A)$ は点スペクトルに限る。すなわち $\lambda \in \sigma(A)$ に対して、 $\phi \in C$  ( $\phi \neq 0$ )が存在し、

$$A\phi = \lambda\phi$$

をみたす。さらに、方程式(1.2)に対しては

$$\sigma(A) = \{\lambda: \Delta(\lambda) = 0\}$$

である。

**注意 3.3.** 一般に方程式(3.1)に対しても、方程式(1.2)と同様に特性方程式が定義され、それによって $\sigma(A)$ が与えられる ([9, 定理 5.14] 参照)。

ここで、生成作用素の意味を簡単に把握するために、 $n$ 次元の自励系線形微分方程式

$$(3.8) \quad \dot{x} = Ax$$

を例にとって考えてみてみよう。ここで、 $A$ は $n \times n$ 実定数行列とする。この方程式の初期条件 $x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n$ をみたす解は、

$$x(t) = e^{At}x_0$$

で与えられる。したがって、(3.8)の解作用素は

$$T(t) = e^{At}$$

で与えられ、生成作用素は

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{At}x - x}{t} = Ax$$

より行列  $A$  に一致する。そして、そのスペクトルは点スペクトルであり行列  $A$  の固有値で与えられる。

方程式 (3.8) の解は行列  $A$  の固有値で全て表現できたことを思い起こすと、時間遅れをもつ微分方程式に対しても解作用素から生成作用を考えそのスペクトルが解を表現するであろう事が容易に推測される。定理 3.2 は、そのスペクトルが、第 3.1 節でもとめた特性根で与えられることを保証している。

生成作用素  $A$  のスペクトル  $\lambda$  に属する一般固有空間も行列  $A$  の場合と全く同様に考えることができ、

$$\mathcal{M}_\lambda(A) := \bigcup_{j=1}^{\infty} N((A - \lambda I)^j)$$

で定義される。ここで、 $N((A - \lambda I)^j) = \{\phi : (A - \lambda I)^j \phi = 0\}$  である。

**定理 3.3** ([9, 定理 5.15, 5.16] 参照).  $\lambda$  が (1.2) の特性根のとき、方程式 (1.2) の一般固有空間  $\mathcal{M}_\lambda(A)$  について、以下のいずれかが成り立つ。

- (i)  $\Delta^{(1)}(\lambda) \neq 0$  であれば、 $\mathcal{M}_\lambda(A) = N(A - \lambda I)$  で与えられ、 $\mathcal{M}_\lambda(A)$  の次元は 1 である。このとき、 $\phi \in \mathcal{M}_\lambda(A)$  であるための必要十分条件は、

$$\phi(s) = c_0 e^{\lambda s}, \quad (c_0: \text{任意定数})$$

である。

- (ii)  $\Delta^{(1)}(\lambda) = 0$  であれば、 $\mathcal{M}_\lambda(A) = N((A - \lambda I)^2)$  で与えられ、 $\mathcal{M}_\lambda(A)$  の次元は 2 である。このとき、 $\phi \in \mathcal{M}_\lambda(A)$  であるための必要十分条件は、

$$\phi(s) = e^{\lambda s}(c_0 + c_1 s), \quad (c_0, c_1: \text{任意定数})$$

である。

有限個の特性根の集合

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \sigma(A)\}$$

を考える。そして、

$$\mathcal{M}_\Lambda(A) = \mathcal{M}_{\lambda_1}(A) \oplus \mathcal{M}_{\lambda_2}(A) \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_{\lambda_p}(A)$$

とおく。このとき、次の定理によって微分方程式 (1.2) の漸近的挙動が決定付けられる。

**定理 3.4** ([9, 定理 5.19] 参照). 方程式 (1.2) について, 相空間  $C = C([- \tau, 0], \mathbb{C})$  は,

$$C = \mathcal{M}_\Lambda(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{N}_\Lambda(\mathcal{A})$$

と直和分解される. また,  $\mathcal{M}_\Lambda(\mathcal{A})$  およびその補空間  $\mathcal{N}_\Lambda(\mathcal{A})$  はそれぞれ解作用素  $T(t)$  の不変部分空間になる. さらに,

$$\beta \geq \max\{\operatorname{Re} \lambda: \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \setminus \Lambda\}$$

とすると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $N_\varepsilon > 0$  が存在して,

$$\|T(t)\phi\| \leq N_\varepsilon e^{(\beta+\varepsilon)t} \|\phi\|, \quad (\phi \in \mathcal{N}_\Lambda(\mathcal{A}), t \geq 0)$$

が成り立つ.

**注意 3.4.** 定理 3.4 より, 初期関数  $\phi \in C$  は,

$$\phi = \phi + \psi, \quad \phi \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathcal{A}), \quad \psi \in \mathcal{N}_\Lambda(\mathcal{A})$$

と分解できる. そして,  $T(t)$  に関して各々の空間が不変であることから,

$$T(t)\phi = T(t)\phi + T(t)\psi, \quad T(t)\phi \in \mathcal{M}_\Lambda(\mathcal{A}), \quad T(t)\psi \in \mathcal{N}_\Lambda(\mathcal{A})$$

が成り立つ. もし,  $\beta < 0$  にとることができれば,  $\varepsilon = -\beta/2$  とすることにより,

$$\|T(t)\psi\| \leq N_\varepsilon e^{-\beta t/2} \|\psi\|$$

すなわち,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\psi\| = 0$$

であることがわかる. すなわち,  $T(t)\psi$  は解の漸近的挙動に影響を与えないことがわかる.

なお, 命題 3.1 の (iii) より, 実部が 0 以上の特性根は高々有限個である. したがって, 実部が正の特性根全体の集合を  $\Lambda$  とすれば,  $\beta < 0$  にとることができ, 解の漸近的挙動はこれらの特性根の一般化固有空間の直和空間  $\mathcal{M}_\Lambda(\mathcal{A})$  に属する関数 (定理 3.3 で具体的に提示している) で与えられる.

### 3.3 方程式 (1.2) の漸近的挙動

前節の結果を用いることにより,

**補題 3.1.** 方程式 (1.2) の特性根について, 次の事柄が成り立つ.

- (i)  $a > 0$  のとき, 正の特性根  $\lambda_0$  が存在する. また,  $\lambda_0$  を除く任意の特性根  $\lambda$  に対して  $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_0$  が成り立つ.

- (ii)  $-1/e < a\tau < 0$  のとき, 相異なる負の特性根  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) が存在し, これらを除く任意の特性根  $\lambda$  に対して  $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_1$  が成り立つ.
- (iii)  $a\tau = -1/e$  のとき, 負の特性根  $\lambda_0 = -1/\tau$  が存在しその重複度は 2 である. また,  $\lambda_0$  を除く任意の特性根  $\lambda$  に対して  $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_0$  が成り立つ.
- (iv)  $-\pi/2 < a\tau < -1/e$  のとき, 実数の特性根は存在せず, 任意の特性根  $\lambda$  に対して  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  が成り立つ.
- (v)  $a\tau = -\pi/2$  のとき, 互いに共役な純虚数の特性根  $\lambda_{\pm} = \pm i\pi/(2\tau)$  が存在し, れらを除く任意の特性根  $\lambda$  に対して  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  が成り立つ.
- (vi)  $a\tau < -\pi/2$  のとき, 実数の特性根は存在せず, 実部が正の互いに共役な複素数の特性根が存在する.

この補題と定理 3.4 および 3.3 から, 微分方程式の漸近的挙動について次の定理が得られる.

**定理 3.5.** 方程式 (1.2) の解の  $t \rightarrow \infty$  のときの挙動 (漸近的挙動) について, 次の事柄が成り立つ.

- (i)  $a > 0$  のとき, ほとんど全ての解は指数的に発散する.
- (ii)  $-1/e < a\tau < 0$  のとき, ほとんど全ての解は指数的に 0 に漸近する.
- (iii)  $a\tau = -1/e$  のとき, ほとんど全ての解は指数的に 0 に漸近する.
- (iv)  $-\pi/2 < a\tau < -1/e$  のとき,  $x = 0$  の周りで振動しながら 0 に漸近する.
- (v)  $a\tau = -\pi/2$  のとき, 初期値で決まる  $c_1, c_2$  に対して,

$$x(t) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2\tau}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2\tau}t\right)$$

に漸近する.

- (vi)  $a\tau < -\pi/2$  のとき, ほとんど全ての解は  $x = 0$  の周りで振動しながら 0 に発散する.

## References

- [1] J. K. Hale and S. V. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, 1993.
- [2] H. Y. Hu and Z. H. Wang, *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*, Springer, 2002.



- [3] G. E. Hutchinson, Circular casual systems in ecology, *Ann. NY Acad. Sci.*, **50**, 221-246, 1948.
- [4] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, On the stability of a periodic solution of a differential delay equation, *SIAM J. Math. Anal.*, **6**, 268-282, 1975.
- [5] M. C. Mackey and L. Glass, Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science*, **197**, 287-289, 1977.
- [6] R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, 1974.
- [7] K. Pyragas., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A*, (1992), **170**, 421-428.
- [8] 浅田統一郎, 『成長と循環のマクロ動学』, 日本経済評論社, 1997.
- [9] 内藤敏機, 原惟行, 日野義之, 宮崎倫子, 『タイムラグをもつ微分方程式』, 牧野書店, 2002.
- [10] 森田義久, 『生物モデルのカオス』, 朝倉書店, 2003.
- [11] 日本数理生物学会編集, 『「数」の数理生物学 巻1』, 共立出版, 2008.
- [12] 吉田博之, 『景気循環の理論』, 名古屋大学出版会, 2003.